

Nuevo paradigma mediante la teoría del caos para comprender la evolución de las pandemias en la sociedad mexicana: ensayo aplicado a la COVID-19

SERGIO LAGUNAS PULS
Universidad del Caribe, México
slagunas@ucaribe.edu.mx

GENARO AGUILAR GUTIÉRREZ
Instituto Politécnico Nacional, México
genaroaguilargtz@gmail.com

BRENDA LIZETH SOTO PÉREZ
Universidad del Caribe, México
bsoto@ucaribe.edu.mx

Resumen. La hipótesis del trabajo, en concordancia con la premisa fundamental de la teoría del caos, es que las condiciones iniciales de una pandemia, en este caso la incidencia hospitalaria, influenciada por la tasa de crecimiento, afectan la previsibilidad de su evolución. A medida que la población relativa de infectados crezca y se combine con tasas de crecimiento mayores, las siguientes expectativas en el tiempo dejarían de obedecer a la esperanza logística, presentándose condiciones caóticas. Así, esta investigación se propuso presentar escenarios rigurosos para la evaluación de la pandemia por COVID-19 en México para entender por qué es necesario pasar al estudio de las pandemias como sistemas caóticos. El planteamiento y los resultados pueden fortalecer las políticas públicas para que las autoridades se anticipen a los inicios de las condiciones caóticas en las ocho regiones de México.

Palabras clave: COVID-19, regiones de México, sistema caótico, políticas públicas.

New Paradigm Using Chaos Theory to Understand the Evolution of Pandemics in Mexican Society: An Essay Applied to COVID-19

Abstract: The hypothesis of this work, in line with the fundamental premise of chaos theory, is that the initial conditions of a pandemic—specifically

hospital incidence, influenced by the growth rate—affect the predictability of its evolution. As the relative population of infected individuals grows and combines with higher growth rates, subsequent expectations over time would cease to follow logistic projections, resulting in chaotic conditions. This research aims to present rigorous scenarios for evaluating the COVID-19 pandemic in Mexico to demonstrate why it is necessary to study pandemics as chaotic systems. The approach and results can strengthen public policies, enabling authorities to anticipate the onset of chaotic conditions in Mexico's eight regions.

Keywords: COVID-19, Mexican regions, chaotic system, public policies.

Introducción

A partir del inicio de la pandemia de COVID-19, originada por la emergencia de un nuevo coronavirus (SARS-CoV-2) en Wuhan, China, en diciembre de 2019, diversas técnicas han sido utilizadas para tratar de identificar los momentos y circunstancias que pueden llevar al control o al menos a la identificación de momentos de fuerte crecimiento y expansión del número de personas infectadas, y, más aún, del número de personas hospitalizadas, ya que esto constituye un serio problema de salud pública y de administración de los escasos recursos de que disponen los sistemas públicos hospitalarios. «Pandemia no es una palabra para usar a la ligera o descuidadamente. Es una palabra que, si se usa incorrectamente, puede causar un miedo irrazonable o una aceptación injustificada de que la lucha ha terminado, lo que lleva a un sufrimiento y muerte innecesarios», afirmó en su aparición pública el director de la Organización Mundial de la Salud al presentar la nueva pandemia mundial (Organización Panamericana de la Salud, 2020).

Históricamente, se han aproximado varias técnicas para modelar las epidemias de enfermedades infecciosas. La mayoría de ellas se basan en modelos de compartimentos que separan a las poblaciones en grupos principales. Esos modelos permiten representar las interacciones entre dichos grupos a partir de reglas matemáticas preestablecidas. La formulación simple proviene de los primeros trabajos de Kermack y McKendrick en la década de 1920 e involucra tres grupos: el primero para las personas sensibles a la enfermedad que son propensas a contraerla, el segundo para las personas infecciosas que han contraído la enfermedad y pueden infectar a personas susceptibles, y el tercero para las personas fuera de este ciclo porque o bien se inmunizaron después de recuperarse, o bien salieron del estudio, o bien fallecieron (Kermack & McKendrick, 1927, pp. 700-721).

Aunque se pueden proponer algunas formulaciones de modelos específicos, en realidad se desconocen todos los mecanismos propagadores y, por lo tanto, también se ignora la forma funcional de distribución exacta o una formulación completa de las ecuaciones que rigen una epidemia.

Ante el surgimiento de una nueva enfermedad con características epidémicas y, peor aún, pandémicas, tres problemas principales se deben enfrentar en una perspectiva de su modelado: (a) ¿cuáles son las variables relevantes para una epidemia dada?, (b) ¿cuáles son las ecuaciones gobernantes que captan adecuadamente estas variables?, (c) ¿cuáles son los valores de los parámetros de estas ecuaciones? Y, entre estas preguntas, otras dos incógnitas muy prácticas: (d) ¿qué observaciones se tienen para construir y restringir un modelo? y, como corolario, (e) ¿cómo reformular las ecuaciones principales (que gobiernan el modelo) con base en los datos disponibles?

Desarrollar un modelo compacto para describir un sistema complejo ha sido un objetivo central de la ciencia desde hace siglos. Los modelos matemáticos implican simplificaciones, y es extremadamente difícil decidir qué factores incluir y cuáles omitir y, en ocasiones, algunos de los factores omitidos son variables clave. Para proporcionar una descripción cuantitativa de todas las contribuciones no incluidas en un modelo, se puede utilizar el cálculo con fractales (Lagunas, Aguilar, & Reyes, 2021). Como generalización de las ecuaciones diferenciales, el cálculo con fractales ha demostrado ser efectivo para tratar procesos complejos.

Otra alternativa para establecer la evolución de un fenómeno, como sucede con las infecciones, es atender a la teoría del caos, la cual sugiere que, desde el inicio de una acción o decisión, de ello dependerá su evolución e impacto para el futuro. Quizá el postulado más conocido sea el del matemático Edward Lorenz, el cual considera que el aleteo de un insecto en un continente podría provocar un huracán que impactara las costas de otro continente (Ambika, 2015).

Una analogía para explicar la propuesta de Lorenz, considerando la propagación de una enfermedad, sería el comportamiento del paciente cero que adquirió un virus. De esta manera, sus hábitos iniciales (aleteos) decidirán la magnitud de la propagación (impacto del huracán). Tal situación presenta claramente el postulado de Lorenz, en el que algo tan sencillo como dejar de acudir a lugares concurridos podría ocasionar una menor propagación, contrariamente a la simple decisión haber viajado en un autobús o visitado una sala de cine, lo que potenciaría una gran diseminación de la infección.

Inspirados en el postulado de Lorenz, en este trabajo consideramos como estado inicial, o aleteo de mariposa, la tasa de incidencia hospitalaria (TIH) en distintos escenarios. El documento está organizado como sigue: en la siguiente sección, se presenta una reseña contemporánea del estado del arte, conformada por estudios que consideran la teoría del caos para comprender el fenómeno; posteriormente, se muestra detalladamente la metodología aplicada en este artículo, incluidos los preliminares matemáticos para la caracterización de la tasa de incidencia hospitalaria (TIH) en México por COVID-19 en la población que requiere servicios hospitalarios, así como la curva de cambios con picos fuera del patrón logístico típico y las bifurcaciones posteriores, ilustrando gráficamente la frontera previa a períodos de caos en las ocho regiones en que se divide el país.

Posteriormente, se realiza un análisis de sensibilidad de los resultados que muestra el grado de propagación desde los años 2 a 6 de la pandemia. Las gráficas de bandas caóticas pueden apreciarse en la tercera sección del artículo.

Finalmente, la cuarta sección muestra las gráficas de bifurcación que presentan el cambio de patrón, desde una distribución logística hacia bifurcaciones caóticas, para prácticamente todas las regiones del país.

En la sección de discusión de resultados, se destaca que, a medida que la tasa de infección (medida aquí por la tasa de incidencia hospitalaria) crezca con el tiempo, dejan de existir condiciones de predicción «certeras» respecto a la evolución de la pandemia, para pasar a hablar, estrictamente, de condiciones caóticas que hacen que este sea un fenómeno no ergódico. Sin embargo, para llegar allá, existe un largo camino desde el inicio de la propagación de la pandemia, período durante el cual se pueden prever con cierta racionalidad las condiciones propiciatorias de los momentos de expansión, lo que en última instancia conduce a la conclusión de que, en tanto no se llegue a las condiciones previas al caos, se puede actuar desde la política pública de salud planificada, evitando la saturación de los sistemas de salud pública en México.

Reseña del estado del arte

A medida que los casos de COVID-19 continúan aumentando en todo el mundo, muchos investigadores han desarrollado modelos matemáticos para ayudar a capturar la dinámica de su propagación.

El legítimo interés por otorgar explicaciones concretas, mediante metodologías complejas, como lo requerido por la propia naturaleza y evolución humana, ha originado valiosos estudios. Desde la perspectiva fractal de la autocorrelación y exponente de Hurst, para determinar si en distintas geografías y escalas de contagios se pueden inferir replicaciones similares (Lagunas *et al.*, 2021). Otras investigaciones abordan los fenómenos complejos desde el concepto de la biología cuántica, lo cual, a simple vista, podría parecer distinto a la modelación fractal; sin embargo, esto no es así; por el contrario, en ambos casos se propone analizar fenómenos humanos, como, por ejemplo, las infecciones, partiendo de que existen distintas escalas o niveles (atómico, molecular, celular, sistemas, entre otros), pero que, a pesar de la existencia de estas escalas, es posible identificar señales coincidentes en la evolución de un fenómeno (Maldonado *et al.*, 2021).

Por otra parte, el modelo SEIR y sus variaciones han sido ampliamente empleados. El modelo SEIR (*susceptible-exposed-infectious-removed*) ha sido empleado para describir la propagación del virus y calcular la cantidad de personas infectadas y fallecidas. El modelo SEIR tiene muchas versiones y se pueden encontrar tratamientos matemáticos, por ejemplo, en Diekmann, Heesterbeek y Britton (2013) y Hethcote (2000), entre otros. El objetivo de ese modelo es calcular el número de personas infectadas, recuperadas y

fallecidas sobre la base del número de contactos, la probabilidad de transmisión de la enfermedad, el período de incubación, la tasa de recuperación y la tasa de mortalidad. El modelo de enfermedad epidémica predice un pico de individuos infectados y fallecidos por día en función del tiempo y asume que los nacimientos y las muertes naturales están equilibrados, ya que se trata con un período de tiempo muy corto. Los miembros de la población disminuyen debido a la enfermedad según lo determina la tasa de mortalidad. Las ecuaciones diferenciales se resuelven con un esquema de Euler directo.

Estos modelos difieren en el tipo de compartimentos incluidos, la naturaleza de las tasas de transmisión, la estacionalidad y varios otros factores. Sin embargo, aunque la propagación de COVID-19 se atribuye en gran medida a una amplia gama de comportamientos sociales en la población, varios de estos modelos SEIR no tienen en cuenta dichos comportamientos.

De acuerdo con Wong, Lee, Kwan y Yeoh (2020), la dinámica de la transmisión de la pandemia por COVID-19 cambió para finales del primer año (hacia diciembre de 2020) en función de la configuración de la exposición al virus, por lo que comprender la interrelación entre el entorno de la exposición y las redes de transmisión es crucial para el diseño adecuado de políticas públicas de salud.

Estudios recientes con datos de personas vacunadas en el Reino Unido (Singanayama *et al.*, 2022; Franco-Paredes, 2022) muestran que la vacunación reduce significativamente el riesgo de hospitalización, pero no reduce la velocidad de la transmisión del virus. Es decir, la propagación del virus se ha modificado hacia otros comportamientos, y es crucial entender cuál es la dinámica subyacente a la velocidad y dirección de la transmisión.

Recientemente, un gran número de autores han sugerido retomar estudios clásicos provenientes de la teoría del caos para modelar el comportamiento de la pandemia (Borah *et al.*, 2022; Mangiarotti *et al.*, 2020), con base en hallazgos previos de diversos estudios que se fundamentaron en la teoría del caos para estudiar comportamientos epidemiológicos (Mangiarotti & Huc, 2019; Mangiarotti *et al.*, 2012; Cazagrandi *et al.*, 2006; Viboud *et al.*, 2003). Los autores sugieren que la dispersión de las pandemias es de naturaleza caótica, con efectos de memoria de largo alcance y características que otros modelos clásicos no logran capturar. Por ello, se propone el uso de la teoría del caos de orden fraccional, que tiene capacidad de memoria y propiedades hereditarias, como herramienta potencial para modelar las pandemias con mayor precisión acercando dicho modelado a su dinámica real. Para ello, se han propuesto análisis de bifurcación sobre los conceptos de lógica difusa que están diseñados para «estabilizar el caos».

El fundamento de esta propuesta metodológica se basa en que la propagación caótica de una pandemia se caracteriza por una sensibilidad extrema a una ligera variación en las condiciones iniciales de factores físicos, tales como el aumento en el número de portadores asintomáticos, el número de personas infectadas y un pequeño aumento en el número de casos no detectados (Volos *et al.*, 2017).

La teoría del caos permite definir, modelar y analizar la propagación exponencial de una pandemia y extraer el componente determinista subyacente ya que toma en consideración factores como las variables relevantes, las ecuaciones que gobiernan dichas variables, los valores de los parámetros, las restricciones del modelo y la reformulación de las ecuaciones principales con base en los datos nuevos (Borah *et al.*, 2022; Mangiarotti *et al.*, 2020).

Digamos que esta nueva generación de modelos, con base en la teoría del caos, está diseñada para mitigar la imprevisibilidad debida al caos durante la transmisión de una pandemia. Concluyen que la severidad y complejidad de una pandemia aumenta a medida que la memoria se desvanece, lo que indicaría que estos modelos (sobre la base de los fractales) pueden usarse como un parámetro crucial para analizar la forma en que se propaga una pandemia.

De esta manera, la investigación enfocada en las causas de tragedias, muertes y pandemias, como parte de la vida misma, ha dado origen a grupos multidisciplinarios que proponen métodos concretos para los sistemas complejos. Tal es el caso del grupo de investigación Complejidad y Salud Pública de la Universidad El Bosque (Aristizábal, 2022), con quienes sin duda sería interesante relacionar la investigación fractal con la biología cuántica (Maldonado *et al.*, 2021).

En el caso de México, no se tiene conocimiento sobre análisis de propagación del virus con base en una teoría relativamente compleja como la teoría del caos, razón por la cual es presentada en este trabajo como parte de los estudios sociales.

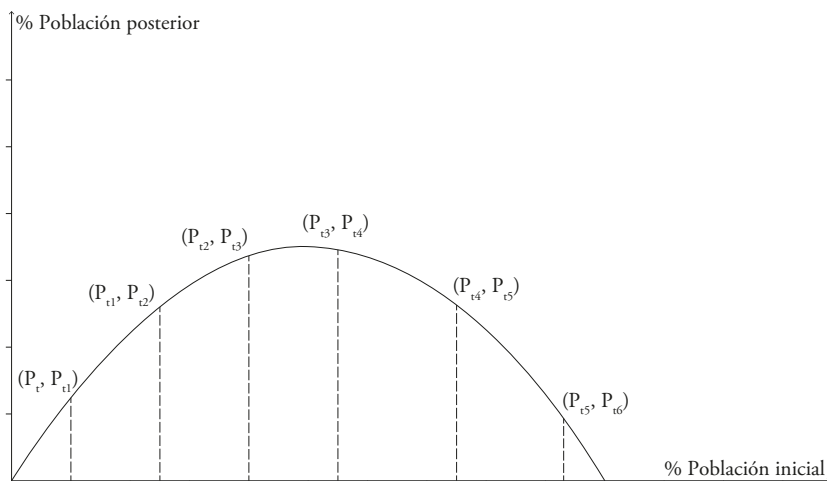
Metodología

El objetivo es identificar los momentos previos e iniciales de caos en la incidencia hospitalaria, debido a cambios en las infecciones generadas por el SARS-CoV-2, por ejemplo, al incrementarse la tasa de crecimiento por una nueva variante o debido a un relajamiento de las medidas sanitarias. La hipótesis del trabajo, en concordancia con la premisa fundamental de la teoría del caos, es que las condiciones iniciales de una pandemia, en este caso la incidencia hospitalaria, influenciada por la tasa de crecimiento, afectan la previsibilidad de su evolución.

La población total (población de individuos infectados con el SARS-CoV-2) estará comprendida entre 0, que representa la ausencia de población infectada, y 1, que es el total de la población infectada. La población inicial, de interés, es la tasa de incidencia hospitalaria (TIH) determinada con el número de casos positivos por entidad federativa (Gobierno de México, 2022) con respecto a las incidencias hospitalarias debido al SARS-CoV-2, en el mismo período y por entidad federativa (Santillán, 2022). La tasa de crecimiento se obtiene de la comparación de la TIH en distintos períodos: la semana 5 del año 2022 y esa misma semana, pero del año 2021. Con base en lo anterior, las autoridades sanitarias, vigilando que no se presenten ciertas características en la tasa de crecimiento e incidencia hospitalaria, podrían prevenir colapsos. Los modelos para identificar períodos previos o de inicio caótico son los siguientes:

- I. Parábolas con las fronteras de períodos previos al caos (figura 1): en este tipo de modelos, se identifican los momentos de inicio caótico a partir de que el crecimiento de la población en un siguiente período deja de mantener un crecimiento constante, es decir, se presenta el caos, ya que se desconoce si disminuirá o aumentará la población en períodos subsiguientes (Costantino *et al.*, 1997; Pelinovsky *et al.*, 2020).

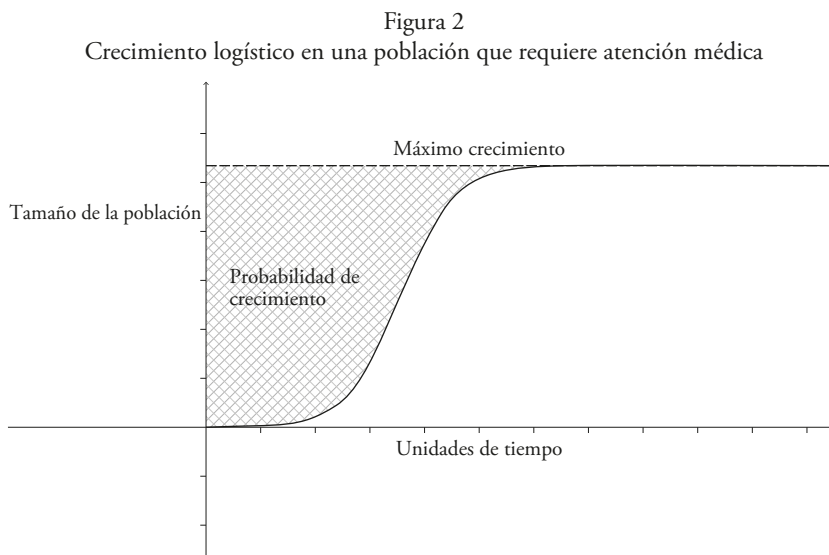
Figura 1
Curva de cambios en la población que requiere servicios hospitalarios



Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

En la figura 1, se muestran ejemplos del cambio en la población en un momento determinado (y) respecto a la población anterior (x),

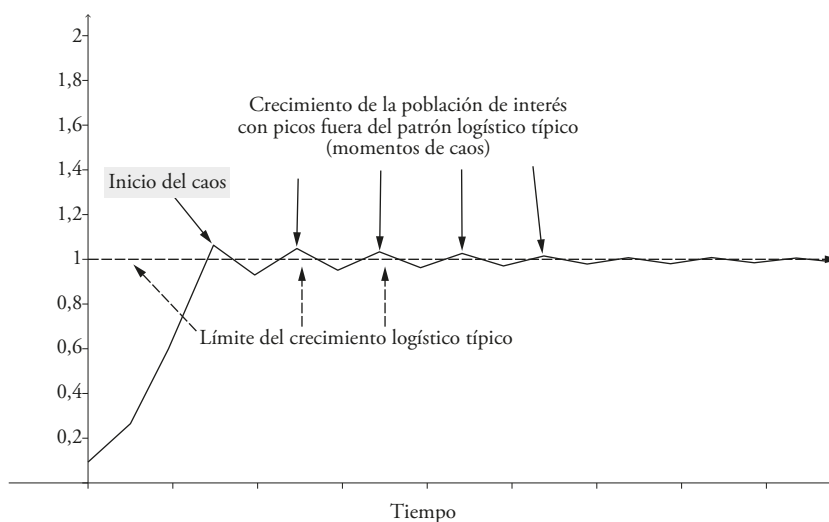
- pudiendo presentarse situaciones en las que la población inicial con necesidad de atención hospitalaria sea menor que la población en un momento futuro; pero también se pueden presentar escenarios contrarios, en los que la población inicial sea mayor que la población que requiere servicios hospitalarios en un momento posterior.
- II. Gráficas de bandas caóticas, agregando el parámetro delta para tiempo (δ_t): inicialmente muestran la forma de un crecimiento logístico típico (Latif & Azmai, 2020; Manca, Caldiroli, & Storti, 2020) (véase la figura 2), sin embargo, a partir de cambios en la tasa de crecimiento a lo largo del tiempo, se identifican los inicios caóticos cuando se excede la expectativa del máximo crecimiento de la población de interés, presentando altas y bajas (figura 3), causando caos (Bacaer, 2008).



Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

En la figura 2, se distingue fácilmente que, a medida que la población que requiere servicios hospitalarios aumenta, la probabilidad de que se incremente la población disminuye, situación que sucede debido a que el modelo parte de una tasa de cambio fija (r) y a la limitante de la población (k). Por otra parte, los modelos que agregan el elemento (δ_t) permiten visualizar los momentos en los cuales los cambios en la población dejan de mostrar un patrón logístico definido (Pelinovsky *et al.*, 2020) debido a que se supera la expectativa máxima para la población que requiere servicios hospitalarios (figura 3).

Figura 3
Gráfica de línea con base en parámetro δ_t



Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

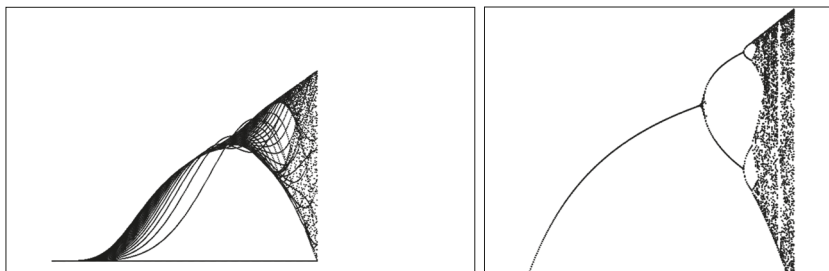
Mediante la figura 3, se aprecia que la población de interés (línea continua) puede incrementarse a medida que pasan los períodos de tiempo. Bajo ciertas condiciones de población y tasa de crecimiento, se presentan «picos» que superan el tope de crecimiento logístico o expectativa máxima de crecimiento, pero, de pronto, suceden descensos que parecieran inesperados (Figueroa *et al.*, 2020), otra característica de los fenómenos caóticos. Si se toma como punto de partida cuando se presentan movimientos caóticos, después de transcurrido un tiempo, la población volverá a estabilizarse al máximo de un modelo logístico; de esta manera, se encontrarán ciclos y ciclos repetitivos de disminución, estabilidad e incremento, hallándose un fenómeno fractal.

Considerando nuevamente la figura 3, al realizar la unión de múltiples períodos de los picos hacia arriba y si análogamente se realiza lo mismo con los períodos con picos hacia abajo, se obtienen bifurcaciones (figura 4), lo cual es una imagen habitual para representar el caos.

III. Gráficas de bifurcación (Figueroa *et al.*, 2020), construidas bajo las coordenadas de población (incidencia hospitalaria) y tasa de crecimiento. Debido a que integran secuencias e iteraciones tanto para la población como para la tasa de crecimiento, entre las cuales se encuentran los valores de cada región de México, se presentan dos tipos de imágenes para todo el país: una que distingue claramente las formas

logísticas iniciales, previas al caos, y otra imagen con un mayor número de iteraciones, que presenta las bifurcaciones bajo una secuencia de secuencia (Grebogi, Ott, & Yorke, 1987; Hasting *et al.*, 1993; Jafari *et al.*, 2021).

Figura 4
Diagramas de bifurcación



Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

Dentro de la revisión de literatura, es necesario mencionar que uno de los principales aportes metodológicos para el crecimiento poblacional se le reconoce al matemático Thomas Malthus, quien consideraba que el incremento en una población era del tipo exponencial (Schrickzelle, 1981).

$$P_t = P_0 e^{rt} \quad (1)$$

En donde (P_t) es la población en un tiempo determinado, (P_0) es la población inicial, (r) es la tasa de crecimiento y (t) es el tiempo al cual se quiere estimar la población (P_t). La propuesta de Malthus (1) presentaba el inconveniente de obtener crecimientos desmedidos, por lo tanto, Pierre François Verhulst complementó la medición agregando una constante (k) para limitar el crecimiento (Shen, 2020), incluyendo con ello las condiciones normales del medio ambiente que no permiten crecimiento desmesurado, debido a enfermedades, escasez de recursos, bajas por la presencia de depredadores e incluso por conflictos entre los mismos individuos (Fernández-Martínez, 2020; Shen, 2020).

$$\frac{dP}{dt} = rP_0 \left(1 - \frac{P_0}{k}\right) \quad (2)$$

La solución de Verhulst al modelo diferencial (2) arroja el planteamiento logístico bajo el cual la probabilidad de aumentar una población cambia, se reduce, conforme se aproxima el tamaño de la población al máximo estimado (Shen, 2020).

$$P_t = \frac{kP_0e^{rt}}{k + P_0(e^{rt} - 1)} \quad (3)$$

Con la propuesta de Verhulst, con crecimiento limitado por la constante (k) y teniendo en cuenta que el cambio se representa con la tasa (r), es posible obtener la población en distintos momentos en el tiempo, sobre una parábola definida.

$$P_t = rP_0(k - P_0) \quad (4)$$

Considerando la ecuación (4), cuando el valor (P_0) de se aleje del valor de la constante (k), la población estimada será más grande; y, por el contrario, cuando el valor se acerque a la constante (k), el estimado de la población será menor. Por supuesto que cualquier estimado futuro dependerá también de la tasa (r). La población sujeta a estimarse estará comprendida entre 0 y 1, donde 0 constituye la ausencia de población y 1 es el total de la población.

Tomando como antecedentes otros estudios del fenómeno de la pandemia a nivel nacional, los análisis y modelos se realizan para las ocho regiones del país (Lagunas *et al.*, 2021; Aguilar & Lagunas, 2020): Noroeste (Baja California, Baja California Sur, Chihuahua, Durango, Sinaloa y Sonora); Noreste (Coahuila, Nuevo León y Tamaulipas); Oeste (Colima, Jalisco, Michoacán y Nayarit); Este (Hidalgo, Puebla, Tlaxcala y Veracruz); Centro Norte (Aguascalientes, Guanajuato, Querétaro, San Luis Potosí y Zacatecas); Centro Sur (Ciudad de México, México y Morelos); Suroeste (Chiapas, Guerrero y Oaxaca); Sureste (Campeche, Quintana Roo, Tabasco y Yucatán).

En el apartado siguiente, se incluyen los parámetros utilizados para cada región, imágenes y resultados que identifican los momentos previos e iniciales del caos, que representan variaciones en la población que requiere servicios hospitalarios.

Datos iniciales

Tabla 1
Parámetros iniciales

Estado	Incidencia hospitalaria al 1 de febrero de 2022	Casos positivos estimados a la semana 5 de 2022	Tasa de incidencia hospitalaria (población inicial)	Casos positivos estimados a la semana 4 de 2022	Casos positivos estimados a la semana 5 de 2021	Tasa de crecimiento
Aguascalientes	24	2514	0,95%	3977,00	595,00	4,23
Baja California	33	1987	1,66%	3875,00	669,00	2,97
Baja California Sur	12	2113	0,57%	3664,00	967,00	2,19
Campeche	8	1355	0,59%	1958,00	106,00	12,78
Coahuila	40	1764	2,27%	5015,00	1146,00	1,54
Colima	10	2868	0,35%	4278,00	302,00	9,50
Chiapas	15	2252	0,67%	3390,00	310,00	7,26
Chihuahua	43	3244	1,33%	6873,00	551,00	5,89
Ciudad de México	138	25 468	0,54%	46 950,00	19 242,00	1,32
Durango	17	816	2,08%	1848,00	502,00	1,63
Guanajuato	76	7303	1,04%	14 182,00	3873,00	1,89
Guerrero	21	1962	1,07%	3434,00	957,00	2,05
Hidalgo	42	3560	1,18%	4821,00	829,00	4,29
Jalisco	127	6355	2,00%	10 877,00	2118,00	3,00
México	170	13 803	1,23%	20 972,00	6244,00	2,21
Michoacán	52	2094	2,48%	2928,00	774,00	2,71
Morelos	32	1900	1,68%	3062,00	2218,00	0,86
Nayarit	15	1938	0,77%	3348,00	296,00	6,55
Nuevo León	72	6881	1,05%	15 775,00	2510,00	2,74
Oaxaca	39	4356	0,90%	6966,00	1229,00	3,54
Puebla	52	5946	0,87%	7616,00	2373,00	2,51
Querétaro	42	3310	1,27%	6305,00	2013,00	1,64
Quintana Roo	7	771	0,91%	1958,00	365,00	2,11
San Luis Potosí	24	3327	0,72%	7865,00	1478,00	2,25
Sinaloa	36	2762	1,30%	5872,00	742,00	3,72
Sonora	41	3421	1,20%	5592,00	975,00	3,51
Tabasco	28	2288	1,22%	5418,00	1221,00	1,87
Tamaulipas	44	2334	1,89%	4716,00	887,00	2,63
Tlaxcala	10	2108	0,47%	2834,00	644,00	3,27
Veracruz	73	7345	0,99%	9150,00	1114,00	6,59
Yucatán	21	2174	0,97%	4565,00	681,00	3,19
Zacatecas	15	962	1,56%	2320,00	671,00	1,43

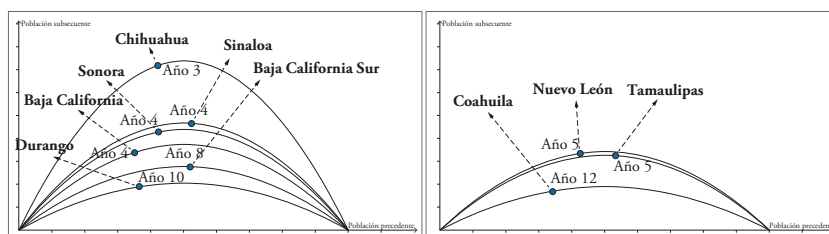
Fuentes: elaboración propia con datos de Gobierno de México (2022) y Santillán (2022).

Resultados

Fronteras de los períodos previos al caos

Figura 5

Frontera previa a períodos de caos: Región Noroeste (izquierda), Región Noreste (derecha)

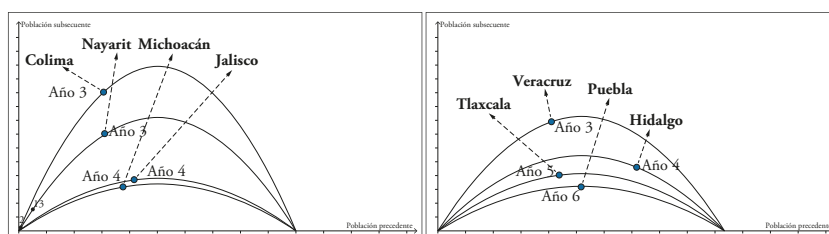


Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

De acuerdo con la figura 5, considerando la tasa de crecimiento obtenida de la comparación de casos positivos en la semana 5 de 2022 versus esa misma semana, pero del año 2021 (tabla 1), en los estados de la Región Noroeste (izquierda), en Baja California, Sinaloa y Sonora, los crecimientos de la incidencia hospitalaria a partir del año 5 se presentan caóticos; en Baja California Sur, el caos se iniciaría a partir del año 9; en Chihuahua, a partir del año 4; y en Durango, en el año 11. Respecto a la Región Noreste (derecha), en Nuevo León y Tamaulipas el caos se iniciaría a partir del año 6, mientras que, en Coahuila, hasta el año 13.

Figura 6

Frontera previa a períodos de caos: Región Oeste (izquierda), Región Este (derecha)

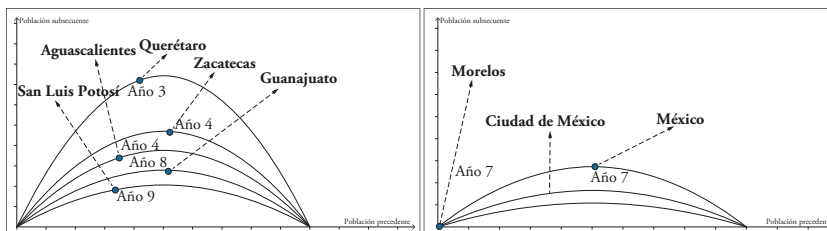


Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

La figura 6 indica que en los estados del oeste de México (izquierda), el caos se presentaría en el año 4 en Colima y Nayarit, mientras que, para Michoacán y Jalisco, el caos aparecería hasta el año 5; respecto a la Región Este (derecha), en el estado de Veracruz aparecería el caos en el año 4; en Hidalgo, en el año 5; en Tlaxcala, en el año 7; y, finalmente, para Puebla, el caos aparecería hasta el año 7.

Figura 7

Frontera previa a períodos de caos: Centro Norte (izquierda), Centro Sur (derecha)

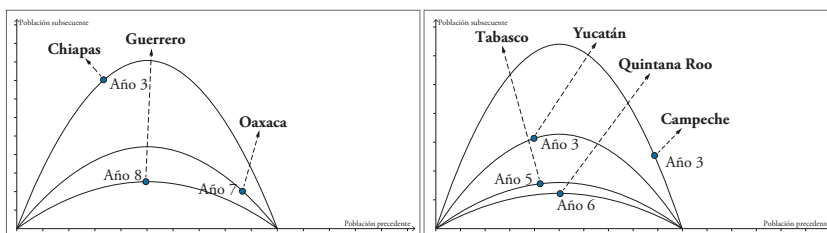


Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

Considerando la figura 7, en los estados de la Región Centro Norte (izquierda), el caos se iniciaría en el año 3 para Querétaro, en el año 5 para los estados de Aguascalientes y Zacatecas, en el año 9 en Guanajuato y, finalmente, en el año 10 para San Luis Potosí. Respecto a la Región Centro Sur (derecha), la Ciudad de México no presentaría caos durante 10 años, mientras que el caos se iniciaría en el año 8 en Morelos y el estado de México.

Figura 8

Frontera previa a períodos de caos: Suroeste (izquierda), Sureste (derecha)



Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

La figura 8 muestra que, en los estados de la Región Suroeste, el caos se iniciaría en el año 4 para el caso de Chiapas, en el año 8 para Oaxaca y a partir del año 9 en el caso de Guerrero. Respecto a la Región Sureste, a partir del año 4 se iniciaría el caos en Campeche y Yucatán, a partir del año 6 en Tabasco y, finalmente, en el año 7 en lo que corresponde a Quintana Roo.

Tabla 2
Parámetros para análisis de sensibilidad y resultados

Estados	Parámetros iniciales			Ensayos de sensibilidad #1			Ensayos de sensibilidad #2			Ensayos de sensibilidad #3		
	P %	r	P2 %	$r + (r/4)$	Frontera en período previo al caos	P3 %	$r + ((r/4)*2)$	Frontera en período previo al caos	P4 %	$r + ((r/4)*3)$	Frontera en período previo al caos	
Aguascalientes	0,95	4,23	1,9	5,28	Año 3	2,86	6,34	Año 2	3,82	7,39	Año 2	
Baja California	1,66	2,97	3,32	3,71	Año 4	4,98	4,46	Año 3	6,64	5,20	Año 2	
Baja California Sur	0,57	2,19	1,14	2,73	Año 5	1,70	3,28	Año 4	2,27	3,82	Año 3	
Campeche	0,59	12,78	1,18	15,9	Año 2	1,77	19,17	Año 2	2,36	22,37	Año 2	
Coahuila	2,27	1,54	4,54	1,92	Sin caos	6,80	2,31	Año 4	9,07	2,69	Año 3	
Colima	0,35	9,50	0,70	11,8	Año 3	1,05	14,25	Año 2	1,39	16,62	Año 2	
Chiapas	0,67	7,26	1,33	9,08	Año 2	2,00	10,90	Año 2	2,66	12,71	Año 2	
Chihuahua	1,33	5,89	2,65	7,36	Año 2	3,98	8,83	Año 2	5,30	10,30	Año 2	
Ciudad de México	0,54	1,32	1,08	1,65	Sin caos	1,63	1,99	Sin caos	2,17	2,32	Año 6	
Durango	2,08	1,63	4,17	2,03	Año 7	6,25	2,44	Año 4	8,33	2,84	Año 3	
Guanajuato	1,04	1,89	2,08	2,36	Año 6	3,12	2,83	Año 4	4,16	3,30	Año 3	
Guerrero	1,07	2,05	2,14	2,56	Año 5	3,21	3,08	Año 4	4,28	3,59	Año 3	
Hidalgo	1,18	4,29	2,36	5,37	Año 3	3,54	6,44	Año 2	4,72	7,52	Año 2	
Jalisco	2,00	3,00	4,00	3,75	Año 3	6,00	4,50	Año 2	7,99	5,25	Año 2	

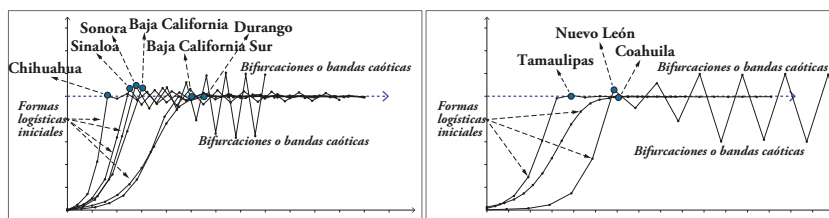
México	1,23	2,21	2,46	2,76	Año 4	3,69	3,32	Año 3	4,93	3,87	Año 3
Michoacán	2,48	2,71	4,97	3,38	Año 3	7,45	4,06	Año 2	9,93	4,73	Año 2
Morelos	1,68	0,86	3,37	1,07	Sin caos	5,05	1,28	Sin caos	6,74	1,50	Sin caos
Nayarit	0,77	6,55	1,55	8,18	Año 2	2,32	9,82	Año 2	3,10	11,46	Año 2
Nuevo León	1,05	2,74	2,09	3,43	Año 4	3,14	4,11	Año 3	4,19	4,80	Año 3
Oaxaca	0,90	3,54	1,79	4,43	Año 3	2,69	5,32	Año 3	3,58	6,20	Año 2
Puebla	0,87	2,51	1,75	3,13	Año 4	2,62	3,76	Año 3	3,50	4,38	Año 3
Querétaro	1,27	1,64	2,54	2,06	Año 7	3,81	2,47	Año 5	5,08	2,88	Año 4
Quintana Roo	0,91	2,11	1,82	2,64	Año 5	2,72	3,17	Año 4	3,63	3,70	Año 3
San Luis Potosí	0,72	2,25	1,44	2,81	Año 5	2,16	3,38	Año 4	2,89	3,94	Año 3
Sinaloa	1,30	3,72	2,61	4,65	Año 3	3,91	5,58	Año 2	5,21	6,51	Año 2
Sonora	1,20	3,51	2,40	4,39	Año 3	3,60	5,26	Año 3	4,79	6,14	Año 2
Tabasco	1,22	1,87	2,45	2,34	Año 5	3,67	2,81	Año 4	4,90	3,28	Año 3
Tamaulipas	1,89	2,63	3,77	3,29	Año 3	5,66	3,95	Año 3	7,54	4,60	Año 2
Tlaxcala	0,47	3,27	0,95	4,09	Año 4	1,42	4,91	Año 3	1,90	5,73	Año 3
Veracruz	0,99	6,59	1,99	8,24	Año 2	2,98	9,89	Año 2	3,98	11,54	Año 2
Yucatán	0,97	3,19	1,93	3,99	Año 3	2,90	4,79	Año 3	3,86	5,59	Año 2
Zacatecas	1,56	1,43	3,12	1,79	Sin caos	4,68	2,15	Año 5	6,24	2,51	Año 4

Elaboración propia.

Gráficas de bandas caóticas

Se utilizan los datos iniciales de la tabla 2 correspondientes a la tasa de incidencia hospitalaria (P), así como también de la tasa de crecimiento (r), para visualizar adecuadamente las imágenes. El tiempo estará expresado en términos delta del tiempo (δ_t), el cual adquiere el valor de acuerdo con el año en que, en cada caso, se iniciaría el caos, posteriormente a las fronteras que se presentaron en las figuras 5-8. El inicio del caos es señalado con puntos en color azul.

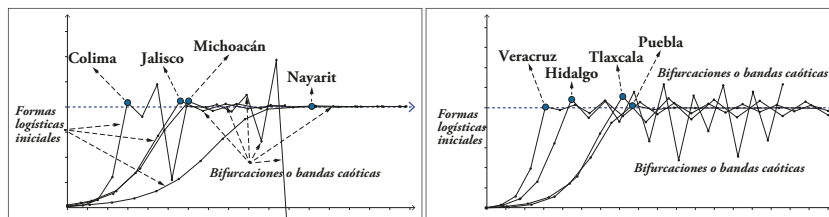
Figura 9
Bandas caóticas: Región Noroeste (izquierda), Región Noreste (derecha)



Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

La figura 9 muestra el inicio del caos en los estados del Noroeste (izquierda): las bandas más pronunciadas corresponden a los estados de Chihuahua, Sonora y Baja California, mientras que las bandas menos pronunciadas corresponden a los estados de Baja California Sur, Durango y Sinaloa. En cuanto a los estados del Noreste, las bandas más pronunciadas se presentan en Nuevo León; en los estados de Coahuila y Tamaulipas, las bandas son más suaves debido a las tasas de crecimiento y población inicial menores que en los otros estados.

Figura 10
Bandas caóticas: Región Oeste (izquierda), Región Este (derecha)

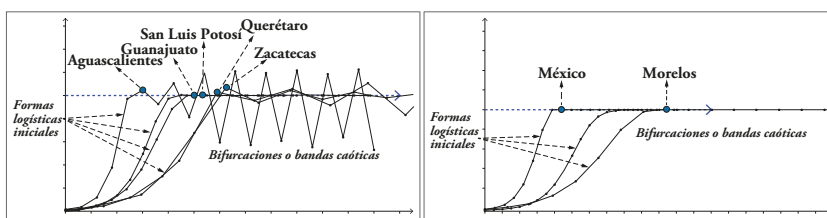


Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

La figura 10 muestra que, en los estados del Oeste (izquierda), las bandas caóticas más pronunciadas se presentan en Colima. En Jalisco y Michoacán, se presentan bandas caóticas menos pronunciadas y similares. En cuanto

a los estados del Este (derecha), es en Veracruz donde las bandas de caos resultaron más pronunciadas, mientras que, para Hidalgo y Tlaxcala, las bandas son similares, pero bien definidas. En Puebla, las bandas de caos son suaves, en el límite logístico, caos incipiente.

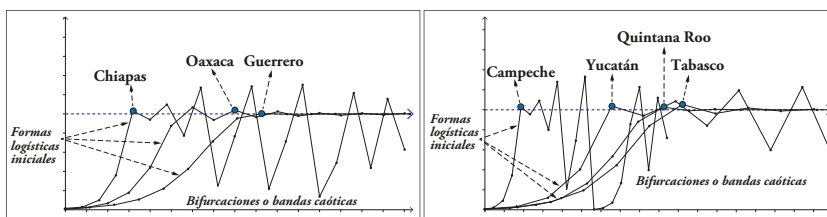
Figura 11
Bandas caóticas: Centro Norte (izquierda), Centro Sur (derecha)



Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

En la figura 11, se aprecia que, en la Región Centro Norte (izquierda), los estados de Guanajuato y San Luis Potosí alcanzan el caos superando ligeramente el límite logístico y manteniéndose; sin embargo, Aguascalientes, Querétaro y Zacatecas presentan bandas caóticas pronunciadas, bien definidas. Por su parte, en los estados del Centro Sur, la Ciudad de México, como se identificó desde la frontera del caos (figura 7), es la única excepción de todo el país que no muestra caos; los otros dos estados de esta región presentaron bandas suaves, superando incipientemente el límite logístico.

Figura 12
Bandas caóticas: Suroeste (izquierda), Sureste (derecha)



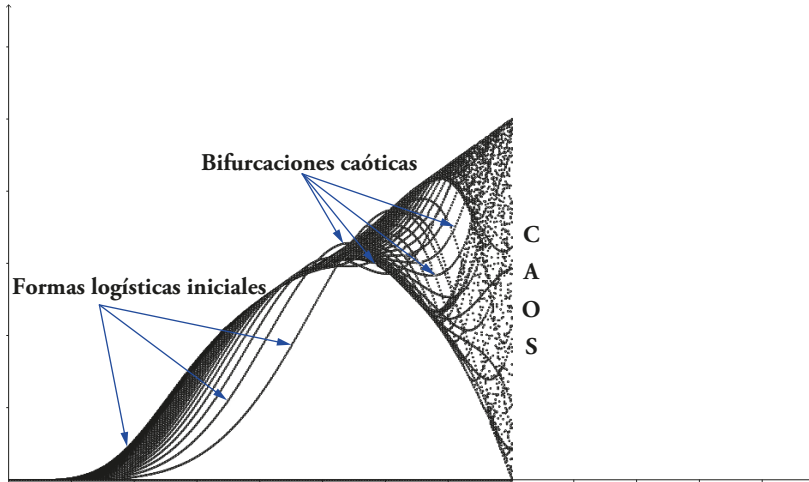
Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

La figura 12 muestra que, en los estados del Suroeste (izquierda), Chiapas presenta bandas caóticas muy pronunciadas, mientras que en Oaxaca y Guerrero son menores, pero bien definidas. En cuanto a la Región Sureste (derecha), los estados de Campeche, Yucatán y Tabasco presentan bandas pronunciadas respecto a Quintana Roo, donde las bandas son más suaves, pero bien definidas.

Gráficas de bifurcación

Figura 13

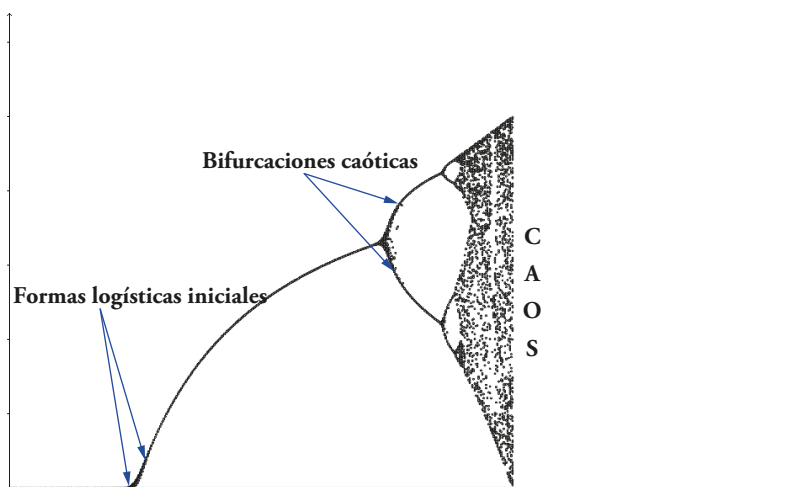
Gráfica de bifurcación distinguiendo formas logísticas iniciales



Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

Para modelar el comportamiento caótico de todo el país, se considera el promedio de la tasa de incidencia hospitalaria (población) y de la tasa de crecimiento (tabla 1). La figura 13 presenta las bifurcaciones caóticas, precedidas de las formas logísticas iniciales, entre las cuales se encuentran aquellas con los parámetros de las regiones de México (figuras 9-12).

Figura 14
Gráfica de bifurcación



Fuente: elaboración propia mediante GeoGebra.

Con mayor número de iteraciones en las variables, se obtiene la gráfica típica de bifurcación (figura 14), en la cual, en su parte inferior izquierda, se aprecian las formas logísticas iniciales, para dar paso a las principales bandas caóticas.

Discusión de los resultados

El tema del caos se basa en una premisa fundamental: de acuerdo con las condiciones iniciales de un fenómeno, en este caso la incidencia hospitalaria, influenciada por la tasa de crecimiento, al paso de cierto tiempo, provocarán condiciones predecibles; no obstante, a medida que la población relativa de infectados crezca y se combine con tasas de crecimiento mayores, por ejemplo por el surgimiento de una nueva variante de SARS-CoV-2, las siguientes expectativas en el tiempo dejarían de obedecer a una esperanza logística, pudiendo presentarse condiciones caóticas.

Precisamente, para conocer el límite en el tiempo de expectativas convencionales apegadas a una función logística, con las parábolas representadas por la función de Verhulst (figuras 5-8) se ejemplifica la forma de obtener estos límites temporales, de tal manera que las autoridades sanitarias puedan tomarlo como un indicador o semáforo preventivo de colapsos hospitalarios, del caos. No obstante, se requerirían monitoreos permanentes de la incidencia hospitalaria y la tasa de crecimiento para actualizar regularmente las expectativas de las fronteras temporales previas al caos y, por supuesto,

disponer de información precisa, ya que de eso dependería la precisión del monitoreo.

Para comentar acerca de los siguientes modelos es útil hacer uso de una analogía. Como sucede con cualquier consulta en sitios virtuales, cuando se accede a la primera pantalla con información general, se puede continuar con un mayor detalle siempre que se seleccione o se haga «doble clic» sobre la opción deseada; de manera análoga se deben entender los modelos y resultados presentados en este trabajo. En este caso, la pantalla o información general son las parábolas con las fronteras previas a los períodos del caos, a partir de las cuales, al hacer «doble clic», se obtienen los modelos de bandas caóticas, los cuales se inician con las formas logísticas típicas, consideradas por Verhulst, pero continúan con las expectativas caóticas para los siguientes períodos inmediatos (en este caso, hasta 20 años), representadas por bifurcaciones o picos de altas que superan el límite logístico habitual, y bajas o disminuciones abruptas que no permiten formular expectativas convencionales.

Una particularidad es que, en algunas de las regiones que se analizaron, por ejemplo, en la Región Centro Sur, es posible distinguir casos excepcionales, como el de la Ciudad de México, donde, con las condiciones iniciales consideradas en este trabajo, no se alcanzaría momento caótico alguno; sin embargo, no se debe olvidar que este trabajo ejemplifica la manera de prever el caos, pero, de implementarse los modelos, se deberán sustituir las condiciones iniciales y observar los resultados. Otra situación poco frecuente, pero sin ser tan excepcional, es lo que se presenta en las bandas caóticas muy cercanas al límite logístico, como lo que se obtuvo en Tamaulipas (Región Noreste), donde sí se presenta el caos al alcanzar o superar incipientemente el límite logístico.

Posteriormente a los modelos con las bandas caóticas, de continuar con la analogía comentada, para conocer expectativas del caos en las incidencias hospitalarias, más allá de las bandas caóticas iniciales, al hacer nuevamente «doble clic», se presentan las imágenes de bifurcaciones del caos, las cuales, integradas mediante secuencias de iteración con las condiciones iniciales de incidencias hospitalarias y tasa de crecimiento, permiten obtener la representación habitual del caos, en donde el fenómeno de estudio se inicia con las formas logísticas, continúa con bifurcaciones que expresan la compilación del caos en las diversas iteraciones secuenciadas, y se repite nuevamente esta situación, que bien podría denominarse como un «monstruo fractal».

Finalmente, es importante señalar que la metodología empleada para el ensayo aplicado a la COVID-19 en México, como en la metodología

fractal o la biología cuántica, no se limitan a infecciones por COVID-19; por el contrario, los métodos para fenómenos complejos, que conforman de manera permanente la vida, abren la posibilidad para considerarlos en la evaluación del impacto de las políticas públicas, ya sea en cuestiones de salud, seguridad, medio ambiente o economía. Muestra de lo anterior es el trabajo desarrollado por grupos de especialistas en la ciencia de la complejidad, por ejemplo, el grupo de investigación Complejidad y Salud Pública de la Universidad El Bosque, en Colombia.

Conclusiones

Los principales hallazgos de la modelación empírica de la tasa de incidencia hospitalaria (TIH) por COVID-19 en México revelan que las ondas caóticas son la forma dominante de dispersión de la pandemia, en todas las regiones del país. El cálculo fraccionario, al poseer las características de herencia y memoria, proporciona modelos más robustos y precisos para analizar la dinámica de las pandemias caóticas, al incorporar flexibilidad dinámica no modelada, como la transmisión dinámica no detectada o asintomática, tal como se puede apreciar en las gráficas de bifurcación. Esta conclusión es mucho más robusta que aquellas emanadas de modelos logísticos tradicionales. Al modelar la pandemia de COVID-19 mediante este modelaje, se descubre una transmisión realista que revela información detallada sobre la dinámica de la propagación que evoluciona hacia el caos.

La estabilidad del equilibrio libre de COVID-19 se lograría mediante el control del orden fraccional. Algunos controladores posibles son: la vacunación masiva, la ingesta de algún fármaco profiláctico por individuos altamente susceptibles, el distanciamiento social (nuevamente), algunas restricciones de movilidad (sobre todo de personas provenientes de países con pandemia descontrolada), entre otros.

Conocer una forma funcional precisa que muestre la dinámica de propagación de la pandemia es lo ideal para la toma de decisiones sobre medidas de control oportunas; sin embargo, sabemos que eso no es posible y que las propuestas en este campo contribuyen a un mejor control, pero no a una solución completa.

Tras la apertura de la economía, y sin medidas de confinamiento, los números de reproducción de la pandemia han aumentado dramáticamente en México y, con este tipo de medidas, estaremos sometidos periódicamente a las nuevas «olas» de la pandemia.

Técnicamente, ahora sabemos que el caos y su imprevisibilidad aumentan a medida que aumenta el operador de orden fraccional; por lo tanto, puede usarse como parámetro para analizar la progresión de la pandemia

por regiones e incluso por estados en México, y es una buena herramienta para obtener un ajuste adecuado más cercano a la dinámica de evolución de la enfermedad por COVID-19.

La determinación precisa de la incidencia hospitalaria está sujeta a los parámetros de la pandemia y a las características cambiantes de la enfermedad (como el surgimiento de nuevas cepas). De nuestra investigación se desprende claramente que la utilidad de los modelos simples para la predicción de la evolución de la pandemia es muy limitada, y que su función principal es más bien ayudar a nuestra comprensión de la dinámica «en tiempo real» de la pandemia, pero no para controlarla. Los modelos más elaborados, formulados a partir de la base de la teoría del caos, pueden ser empleados para predecir y comprender cómo se propaga la enfermedad infecciosa por regiones de México y cómo varios factores afectan su dinámica.

Dado que el caos indica una muy elevada sensibilidad a las condiciones iniciales, no hay posibilidad de una predicción precisa (seguimos en la no ergodicidad, ya analizada por Aguilar y Lagunas, 2020) a largo plazo de la propagación de la epidemia y pueden ocurrir cambios repentinos no esperados. Sin embargo, el monitoreo de la dinámica de la pandemia a partir de la teoría del caos sí es útil para diseñar medidas de política pública de salud más eficientes, más rápidas, que permitan gestionar el caos (administrarlo) y tener una toma de decisiones en lo que resta de la evolución de la pandemia, utilizando el enfoque más realista de la teoría del caos de orden fraccional y reduciendo así la imprevisibilidad en los brotes de nuevas variantes del virus. Por lo anterior, la hipótesis de investigación se acepta.

Finalmente, se considera importante señalar que en los resultados obtenidos aplicando la teoría del caos, a diferencia de lo que sucede con los modelos compartimentales (que estratifican a los individuos), los caóticos analizan a la población en general a través de un elemento clave, que para el presente trabajo está representado por la incidencia hospitalaria, como detonante de la evolución del fenómeno, análogo a lo que Edward Lorenz denominó como «efecto mariposa».

Referencias

- Aguilar, G., & Lagunas, S. (2020). *Animal spirits* y no-ergodicidad para COVID 19 en algunos estados de México. *Panorama Económico*, 16(32), 89-98. <https://doi.org/10.29201/peipn.v16i32.10>
- Ambika, G. (2015). Ed Lorenz: Father of the «butterfly effect». *Resonance*, 20, 198-205. <https://doi.org/10.1007/s12045-015-0170-y>
- Aristizábal Tobler, C. (2022). *Una mirada a las tragedias, la muerte, las pandemias como una mirada a la vida*. Bogotá: Universidad El Bosque. Grupo de Investigación Complejidad y Salud Pública.
- Bacaer, N. (2008). *Verhulst et l'équation logistique en dynamique des populations*. París: Hal. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340v3>
- Borah, M., Gayan, A., Sharma, J. S. *et al.* (2022). Is fractional-order chaos theory the new tool to model chaotic pandemics as COVID-19? *Nonlinear Dynamics*, 109, 1186-1215. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-07196-3>
- Cazagrandi, R. *et al.* (2006). The SIRC model and influenza A. *Mathematical Biosciences*, 200, 152-169.
- Costantino, R., Desharnais, R., Cushing, J. M., & Dennis, B. (1997). Chaotic dynamics in an insect population. *Science*, 275(5298), 389-391. <https://doi.org/10.1126/science.275.5298.389>
- Diekmann, O., Heesterbeek, H., & Britton, T. (2013). *Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics*. Princeton: Princeton University Press.
- Fernández-Martínez, J. (2020). *Un modelo robusto para la predicción ad-futurum de los efectos de la epidemia del COVID-19*. Documentos de Trabajo. España: Fedea. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7527703>
- Figueroa, W. *et al.* (2020). Analysis of population dynamics and chaos theory. *Journal of Physics: Conference Series*, 1448. doi:10.1088/1742-6596/1448/1/012001
- Franco-Paredes, C. (2022). Transmissibility of SARS-CoV-2 among fully vaccinated individuals. *The Lancet Infectious Diseases*, 22(1), P16.
- Gobierno de México. (2022, 20 de abril). *COVID-19, México: datos epidemiológicos*. Dirección General de Epidemiología. <https://covid19.sinave.gob.mx/graficasestimados.aspx>
- Grebogi, C., Ott, E., & Yorke, J. (1987). Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics. *Science*, 238(4827), 632-638. <https://doi.org/10.1126/science.238.4827.632>
- Hasting, A., Hom, C., Ellner, S., & Turchin, P. (1993). Chaos in ecology: Is mother nature a strange attractor? *Annual Reviews of Ecology and Systematics*, 24, 1-33. <https://doi.org/10.1146/annurev.es.24.110193.000245>
- Hethcote, H. W. (2000). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 42(4), 599-653.
- Jafari, A., Hussain, I., Nazarimehr, F., Golpayegani, S. M. R. H., & Jafari, S. (2021). A simple guide for plotting a proper bifurcation diagram. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 31(01), 2150011. <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0218127421500115>

- Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A. Mathematics*, 115(772), 700-721 <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1927.0118>
- Lagunas, S., Aguilar, G., & Reyes, O. (2021). *Animal spirits* y COVID-19 en México. *Revista Legislativa de Estudios Sociales y de Opinión Pública*, 14(30), 13-76. <http://www5.diputados.gob.mx/index.php/camara/Centros-de-Estudio/CESOP/Estudios-e-Investigaciones/Revista-Legislativa-CESOP>
- Latif, N. S., & Azmai, N. (2020). Agriculture management strategies using simple logistic growth model. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*, 596. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1755-1315/596/1/012076/pdf>
- Maldonado, C. E. (Comp.). (2019). *Salud pública y complejidad: historia, conceptos, ejes* (Vivas, L. J., Gómez Barrera, L. A., Galvis Villamizar, S., Bonilla, J. V., Aristizábal Tobler, C., & Maldonado, C. E.). Colección Complejidad y Salud. Bogotá: Universidad El Bosque.
- Maldonado, C. E., Cárdenas, H., Sandoval, J., Gómez, L., Aristizábal, C., Arango, D., & García, A. (2021). *Una mirada a la biología cuántica con un interés en la salud*. Investigaciones en Complejidad y Salud. Bogotá: Universidad El Bosque. <https://workingpapers.unbosque.edu.co/sites/default/files/2022-06/Wp%2014.pdf>
- Manca, D., Caldiroli, D., & Storti, E. (2020). A simplified math approach to predict ICU beds and mortality rate for hospital emergency planning under COVID-19 pandemic. *Computers & Chemical Engineering*, 140, 106945. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2020.106945>
- Mangiarotti, S. *et al.* (2012). Polynomial search and global modeling: Two algorithms for modeling chaos. *Physical Review E*, 86, 046205.
- Mangiarotti, S., & Huc, M. (2019). Can the original equations of a dynamical system be retrieved from observational time series? *Chaos*, 29, 023133. doi:10.1063/1.5081448
- Mangiarotti, S., Peyre, M., Zhang, Y., Huc, M., Roger, F., & Kerr, Y. (2020). Chaos theory applied to the outbreak of COVID-19: An ancillary approach to decision making in pandemic context. *Epidemiology and Infection*, 148, e95, 1-9. <https://doi.org/10.1017/S0950268820000990>
- Organización Panamericana de la Salud. (2020, 11 de marzo). *La OMS caracteriza a COVID-19 como una pandemia*. <https://www.paho.org/es/noticias/11-3-2020-oms-caracteriza-covid-19-como-pandemia>
- Pelinovsky, E., Kurkin, A., Kurkina, O., Kokoulina, M., & Epifanova, A. (2020). Logistic equation and COVID-19. *Chaos, Solitons and Fractals*, 140, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110241>
- Santillán, M. (2022, 28 de marzo). Cinvestav Monterrey. <https://monterrey.cinvestav.mx/msantillan/Coronavirus>
- Schtickzelle, M. (1981). Pierre-François Verhulst (1804-1849). La première découverte de la fonction logistique. *Population*, 36(3), 541-556. https://www.persee.fr/doc/pop_0032-4663_1981_num_36_3_17418
- Shen, C. (2020). Logistic growth modelling of COVID-19 proliferation in China and its international implications. *International Journal of Infectious Diseases*, 96, 582-589. <https://doi.org/10.1016/j.ijid.2020.04.085>

- Singanayaman, A., Hakki, S., Dunning, J. *et al.* (2021). Community transmission and viral load kinetics of the SARS-CoV-2 delta (B.1.617.2) variant in vaccinated and unvaccinated individuals in the UK: A prospective, longitudinal, cohort study. *Lancet Infect Dis.*, publicación en línea, 29 de octubre.
- Viboud, C. *et al.* (2003) Prediction of the spread of influenza epidemics by the method of analogues. *Americal Journal of Epidemiology*, 158, 996-1006.
- Volos, C., Akgul, A., Pham, V. T. *et al.* (2017). A simple chaotic circuit with a hyperbolic sine function and its use in a sound encryption scheme. *Nonlinear Dyn.*, 89, 1047-1061. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3499-9>
- Wong, N. S., Lee, S. S., Kwan, T. H., & Yeoh, E. K. (2020). Settings of virus exposure and their implications in the propagation of transmission networks in a COVID-19 outbreak. *Lancet Reg Health West Pac.*, 4, 100052. doi:10.1016/j.lanwpc.2020.100052.